

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений

Каменский М.И.

подпись, расшифровка подписи

19.05.2022

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.22 Действительный анализ

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 02.03.01 Математика и компьютерные науки
- 2. Профиль подготовки:** математическое и компьютерное моделирование; математические методы и компьютерные технологии в естествознании, экономике и управлении
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
- 4. Форма образования:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений
- 6. Составители программы:** Сапронова Татьяна Юрьевна, к.ф.-м.н., доцент; Петрова Анастасия Александровна, преподаватель; Бондарев Андрей Сергеевич, преподаватель, математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений
- 7. Рекомендована:** НМС математического факультета, протокол №0500-03 от 24.03.2022 г.
- 8. Учебный год:** 2024-2025 **Семестр(ы):** 5

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целью курса является доведение до студентов идей и методов функционального анализа, который является языком современной математики, где широко используются понятия функционального пространства (бесконечномерного) и отображения таких пространств.

Задача этой дисциплины состоит в развитии у студентов двойного зрения: с одной стороны умения следить за внутренней логикой развития теорий функционального анализа, а с другой - не упускать из вида обслуживаемую этими теориями проблематику классического и даже прикладного анализа.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина относится к обязательной части Блока 1. Дисциплины (модули) учебного плана по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: определения основных классов функций, теории меры Рисса и Лебега Уметь: вычислять интеграл Лебега, находить меру множества, доказывать принадлежность функции к различным классам Владеть: основными методами, использующимися для решения задач по действительному анализу
		ОПК 1.2	Умеет использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности	Знать: основные методы доказательств и решения задач Уметь: использовать методы действительного анализа для решения теоретических и прикладных задач Владеть: способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: теоретические основы действительного анализа Уметь: выбирать методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний Владеть: навыками доказательства и решения задач, применяющимися в действительном анализе

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 3/108

Форма промежуточной аттестации: зачёт

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)
--------------------	---------------------

	Всего	По семестрам	
		Сем.5	
		ч.	ч., в форме ПП
Аудиторные занятия	54	54	
в том числе: лекции	18	18	
практические	36	36	
лабораторные			
Самостоятельная работа	54	54	
Контроль			
Итого:	108	108	
Форма промежуточной аттестации		Зачёт	

13.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1.1	Измеримые функции и множество C^+	<p>Множества меры нуль. Ступенчатые функции, действия над ними. Измеримые функции, действия над ними. Интегрирование ступенчатых функций. Свойства интеграла. Две леммы о последовательностях ступенчатых функций.</p> <p>Множество функций C^+, действия над функциями из C^+. Конечность почти всюду функций из C^+.</p> <p>Интеграл в множестве C^+. Простейшие свойства интеграла в C^+. Теорема о предельном переходе в C^+ под знаком интеграла. Следствие.</p> <p>Критерий интегрируемости по Риману функции $x(t)$ в терминах функций \underline{x} и \bar{x}, следствие. Теорема об интегрируемости функции по Риману в терминах последовательностей ступенчатых функций. Функции x, \tilde{x} и доказательство равенств почти всюду $x = \underline{x}$, $\tilde{x} = \bar{x}$. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману</p>
1.2	Суммируемые функции и интеграл Лебега	<p>Суммируемые функции (определение). Действия над суммируемыми функциями.</p> <p>Интеграл в классе суммируемых функций (определение). Свойства интеграла. Лемма о представлении суммируемой функции. Теорема Беппо Леви, следствия 1 и 2.</p> <p>Теорема о связи несобственного интеграла Римана для неотрицательной функции с интегралом Лебега. Пример функции, несобственно интегрируемой по Риману, но не суммируемой.</p> <p>Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (три леммы). Следствия 1 и 2. Теорема Фату.</p>
1.3	Мера множества	<p>Определение измеримого множества и его меры. Простейшие свойства измеримых множеств. Теорема об объединении измеримых множеств, следствие для пересечения измеримых множеств. Теорема о мере объединения попарно не пересекающихся измеримых множеств. Теорема о мере объединения расширяющейся последовательности измеримых множеств. Следствие о мере объединения измеримых множеств. Следствие о мере пересечения убывающей последовательности измеримых множеств.</p> <p>Существование неизмеримого множества (множество Лузина). Структура измеримого множества положительной меры.</p>
1.4	Теория Лебега	<p>Внешняя мера множества. Теорема о внешней мере измеримого множества. Теорема об измеримости множества в терминах внешней меры. Определение измеримого множества по Лебегу в терминах внешней и внутренней меры.</p>

		<p>Функции, измеримые по Лебегу. Теорема о множествах функций, измеримых по Лебегу и по Риссу.</p> <p>Определение по Лебегу интеграла от ограниченной измеримой функции. Теорема о совпадении интеграла по Лебегу и интеграла по Риссу от ограниченной измеримой функции. Определение по Лебегу интеграла от неограниченной измеримой функции. Теорема о совпадении множества функций, интегрируемых по Риссу, с множеством функций, интегрируемых по Лебегу.</p>
1.5	Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных	<p>Интегрирование по измеримому множеству. Простейшие свойства. Теорема об интегрировании по объединению измеримых множеств. Теорема о суммируемости неотрицательной функции на объединении измеримых множеств. Оценка интеграла по измеримому множеству. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.</p> <p>Случай бесконечного промежутка. Доказательство измеримости предела измеримых функций. Мера пересечения убывающей последовательности измеримых множеств.</p> <p>Случай функции двух независимых переменных. Теорема Фубини (без док-ва). Теорема о суммируемости по прямоугольнику функции, для которой существует один из повторных интегралов, два следствия.</p>
1.6	Пространства суммируемых функций	<p>Пространства $L_p[a, b]$. (определение и линейность для $0 \leq p < \infty$). Неравенство Гельдера. Норма для случая $1 \leq p < \infty$.</p> <p>Полнота пространства $L_p[a, b]$. Пространство $L_\infty[a, b]$ (определение и норма).</p>
2. Практические занятия		
2.1	Множества меры нуль, измеримые функции, функции класса C^+	<p>Множества меры нуль. Ступенчатые функции, действия над ними. Измеримые функции, действия над ними. Интегрирование ступенчатых функций. Свойства интеграла.</p> <p>Множество функций C^+, действия над функциями из C^+.</p> <p>Интеграл в множестве C^+. Простейшие свойства интеграла в C^+.</p> <p>Применение критерия Лебега интегрируемости по Риману</p>
2.2	Суммируемые функции и интеграл Лебега	<p>Суммируемые функции Действия над суммируемыми функциями. Интеграл в классе суммируемых функций Свойства интеграла.</p> <p>Применение теоремы о связи несобственного интеграла Римана для неотрицательной функции с интегралом Лебега. Пример функции, несобственно интегрируемой по Риману, но не суммируемой.</p> <p>Применение теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и следствий из неё</p>
2.3	Мера множества	<p>Определение измеримого множества и его меры. Простейшие свойства измеримых множеств. Применение теорем об объединении измеримых множеств, следствие для пересечения измеримых множеств, о мере объединения попарно не пересекающихся измеримых множеств, о мере объединения расширяющейся последовательности измеримых множеств, следствия о мере объединения измеримых множеств, следствия о мере пересечения убывающей последовательности измеримых множеств.</p> <p>Существование неизмеримого множества (множество Лузина). Структура измеримого множества положительной меры.</p>
2.4	Теория Лебега	<p>Внешняя мера множества. Применение теоремы о внешней мере измеримого множества, теоремы об измеримости множества в терминах внешней меры. Определение измеримого множества по Лебегу в терминах внешней и внутренней меры.</p> <p>Функции, измеримые по Лебегу. применение теоремы о множествах функций, измеримых по Лебегу и по Риссу.</p>

		Определение по Лебегу интеграла от ограниченной измеримой функции. применение теоремы о совпадении интеграла по Лебегу и интеграла по Риссу от ограниченной измеримой функции. Определение по Лебегу интеграла от неограниченной измеримой функции. Применение теоремы о совпадении множества функций, интегрируемых по Риссу, с множеством функций, интегрируемых по Лебегу.
2.5	Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных	Интегрирование по измеримому множеству. Использование простейших свойств. Применение теоремы об интегрировании по объединению измеримых множеств. Теорема о суммируемости неотрицательной функции на объединении измеримых множеств. Оценка интеграла по измеримому множеству. Применение теоремы об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Случай бесконечного промежутка. Случай функции двух независимых переменных.
2.6	Пространства суммируемых функций	Пространства $L_p[a, b]$. Использование неравенства Гельдера. Норма для случая $1 \leq p < \infty$. Пространство $L_\infty[a, b]$ (определение и норма).

13.2 Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Измеримые функции и множество C^+	4	8		12	24
2	Суммируемые функции и интеграл Лебега	3	6		9	18
3	Мера множества	2	4		6	12
4	Теория Лебега	4	8		12	24
5	Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных	2	6		8	16
6	Пространства суммируемых функций	3	4		7	14
	Всего	18	36		54	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Преподавание дисциплины заключается в чтении лекций и проведении практических занятий. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях. При изучении курса «Действительный анализ» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Смагин, Виктор Васильевич. Действительный анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие : [для студ. 3 курса мат. фак. для направлений: 010100 - Математика, 010200 - Математика и компьютерные науки; для специальности 01701 - Фундаментальная математика и механика] / В.В. Смагин ; В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т. — Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из интранета ВГУ. — Текстовый файл. — Windows 2000; Adobe Acrobat Reader. — <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf >.
2	Смагин, Виктор Васильевич. Функциональные пространства. Вводный курс [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов : [для студ. 2 курса мат. фак. для направлений: 010100 - Математика, 010200 - Математика и компьютерные науки; для специальности 01701 - Фундаментальная математика и механика] / В.В. Смагин ; В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т. — Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Воронежский государственный университет, Математический факультет, 2017. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из интранета ВГУ. — Текстовый файл. — Windows 2000; Adobe Acrobat Reader 4,0. — <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m17-92.pdf >.
3	Смагин, В.В. Линейные операторы и функционалы [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов : [для студ. 3 курса мат. фак. для направления 010100 - Математика; специальности 010101 - Математика] / В.В. Смагин ; В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т. — Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. — Загл. с титул. экрана. — Свободный доступ из интранета ВГУ. — Текстовый файл. — Windows 2000; Adobe Acrobat Reader. — <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m11-200.pdf >.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь ; пер. с фр. Д.А. Василькова под ред. С.В. Фомина; ред. С.А. Теляковский. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Мир, 1979. — 587 с.
2	Функциональный анализ и интегральные уравнения : Лабораторный практикум : Учебное пособие для студ. мат. специальностей вузов / А.Б. Антоневич, Е.И. Ваткина, М.Х. Мазель и др. ; Под ред. А.Б. Антоновича и Я.В. Радыно. — Минск : БГУ, 2003. — 178с.
3	Сборник заданий для лабораторных работ по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" : Для студ. 2 и 4 к. мат. фак. всех форм обучения / Воронеж. гос. ун-т. Каф. функц. анализа и оператор. уравнений; Сост. В. В. Смагин. — Воронеж, 2001. — 27 с.
4	Шилов, Георгий Евгеньевич. Математический анализ. Второй специальный курс : учебное пособие для гос. ун-тов / Г.Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 327 с.
5	Дифференцирование и интеграл Лебега : Учебное пособие для студентов по специальности 010100 - Математика / Воронеж. гос. ун-т; Сост. В.В. Смагин. — Воронеж, 2003. — 35 с. — Библиогр.: с. 34. — <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/mar04065.pdf >.
6	Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. — Изд. 7-е. — М. : Физматлит, 2006. — 570 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
1	Электронно-библиотечная система "Лань" https://e.lanbook.com/

2	Электронно-библиотечная система "Консультант студента" http://www.studmedlib.ru
---	--

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	Сборник заданий для лабораторных работ по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" : Для студ. 2 и 4 к. мат. фак. всех форм обучения / Воронеж. гос. ун-т. Каф. функцион. анализа и оператор. уравнений; Сост. В. В. Смагин.— Воронеж, 2001 .— 27 с.
2.	Треногин, Владилен Александрович. Функциональный анализ : учебник для студ., обуч. по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин .— Изд. 4-е, испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с. : ил. — Библиогр.: с. 482-483 .
3.	Линейные операторы и функционалы : пособие для студентов по специальности 010101 (010100) - Математика / Воронеж. гос. ун-т, Каф. функционал. анализа; сост. А.О. Рыченков .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2005 .— 27с.

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации учебной дисциплины проводятся различные типы лекций: вводная лекция, лекция-информация, лекция-диалог, лекция с применением современных компьютерных технологий (лекция-презентация), а также практических занятий, на которых осуществляется решение задач и устные опросы по темам занятия.

Дисциплина может реализовываться с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. При проведении занятий в дистанционной форме используются технические и информационные ресурсы Образовательного портала "Электронный университет ВГУ" (<https://edu.vsu.ru>), базирующегося на системе дистанционного обучения Moodle, развернутой в университете, а также другие доступные ресурсы в сети Интернет.

Самостоятельная работа регламентируется Положением об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, оснащенные специализированной мебелью.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-6	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Контрольная работа
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт				Перечень вопросов к зачёту из п.20.2

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: контрольные работы

Описание технологии проведения

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)

Для оценивания результатов обучения на контрольной работе используются следующие показатели:

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение применять полученные знания в практическом задании.

Задания для контрольной работы 1

Вариант 1.

Задание 1. Может ли множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, быть множеством меры нуль?

Вариант 2.

Задание 1. Привести пример суммируемой функции, квадрат которой не суммируем.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: собеседование по билетам к зачёту

Перечень вопросов к зачёту:

1. Лемма 1 об объединении множеств меры нуль.
2. Лемма 4 о действиях с измеримыми функциями. Следствие.
3. Лемма 7 о последовательности неотрицательных ступенчатых функций.
4. Леммы 8 о последовательности неотрицательных ступенчатых функций.
5. Лемма 9 о действиях с функциями из C^+ .
6. Лемма 10 о корректности определения C^+ -интеграла, следствие.

7. Теорема 2 о предельном переходе в C +-интеграле, следствие.
8. Теорема 3 об интегрировании функции по Риману в терминах функций $x(t)$ и $x(t)$.
Следствие.
9. Лемма 14 о действиях с суммируемыми функциями.
10. Леммы 15 и 16 о свойствах интеграла в $L(a, b)$.
11. Теорема 5 (Беппо Леви).
12. Следствия 1 и 2 из теоремы 5 Беппо Леви.
13. Теорема 6 о несобственной интегрируемости и суммируемости функции.
14. Теорема 7 (Лебега), лемма 18.
15. Теорема 7 (Лебега), лемма 19.
16. Теорема 7 (Лебега), лемма 20.
17. Следствия 1 и 2 из теоремы 7 Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
18. Теорема 8 (Фату).
19. Простейшие свойства измеримых множеств (1 – 6).
20. Теорема 9 об объединении последовательности измеримых множеств. Следствие.
21. Теорема 10 о мере объединения возрастающей последовательности измеримых множеств. Следствие.
22. Теорема 11 о мере объединения последовательности измеримых множеств. Следствие.
23. Теорема 12 о структуре измеримого множества положительной меры.
24. Теорема 13 о мере измеримого множества как его внешней меры.
25. Теорема 14 об измеримости множества в терминах внешней меры.
26. Функции, измеримые по Лебегу. Теорема 15.
27. Определение интеграла по Лебегу от ограниченной измеримой функции. Теорема 16.
28. Теорема 17 о множествах суммируемых функций и функций, интегрируемых по Лебегу.
29. Простейшие свойства интегрирования по измеримому множеству.
30. Теоремы 18 и 19 о суммируемости функций по объединению измеримых множеств.
31. Теорема 22 о достаточном условии суммируемости функции по прямоугольнику.
32. Два следствия из теоремы 22.
33. Пространство функций $L_p(a, b)$ и неравенство Гельдера.
34. Норма в пространстве $L_p(a, b)$ (обоснование). Замечание о пространстве $L_2(a, b)$.
35. Пространство $L^\infty(a, b)$ (лемма 22 и аксиомы нормы).

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и степень сформированности умений и (или) навыков.

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Зачёт	
Обучающийся знает основные определения, теоремы. Умеет применять их к практическим заданиям. Обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	<i>Зачтено</i>
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе, не дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	<i>Не зачтено</i>